

一元一次方程深入探讨（加油站）

一、复杂方程解法

1. 计算： $\left(\frac{x-2}{2006}-2\right)+\left(\frac{x}{2007}-2\right)+\left(\frac{x+2}{2008}-2\right)=0$.

【答案】 $x = 4014$.

【解析】 原式 = $\frac{x-4014}{2006} + \frac{x-4014}{2007} + \frac{x-4014}{2008} = 0$
 $(x-4014) \times \left(\frac{1}{2006} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2008}\right) = 0$
故答案为： $x = 4014$.

【标注】 【知识点】 分离法解一元一次方程

2. $\frac{x}{1 \times 4} + \frac{x}{4 \times 7} + \cdots + \frac{x}{22 \times 25} = 16$

【答案】 $x = 50$

【解析】 $\frac{x}{1 \times 4} + \frac{x}{4 \times 7} + \cdots + \frac{x}{22 \times 25} = 16$
解： $\left(\frac{3}{1 \times 4} + \frac{3}{4 \times 7} + \cdots + \frac{3}{22 \times 25}\right) \frac{x}{3} = 16$
 $\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{22} - \frac{1}{25}\right) \frac{x}{3} = 16$

$$\left(1 - \frac{1}{25}\right) \frac{x}{3} = 16$$

$$x = 50$$

【标注】【知识点】裂项法解一元一次方程

3. 解方程： $\frac{x}{1 \times 3} + \frac{x}{3 \times 5} + \cdots + \frac{x}{2007 \times 2009} = 2008$

【答案】 $x = 4018$.

【解析】

$$\frac{x}{1 \times 3} + \frac{x}{3 \times 5} + \cdots + \frac{x}{2007 \times 2009} = 2008$$

$$\text{解：} \left(\frac{x}{1 \times 3} + \frac{x}{3 \times 5} + \cdots + \frac{x}{2007 \times 2009} \right) \frac{x}{2} = 2008$$

$$\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2007} - \frac{1}{2009} \right) \frac{x}{2} = 2008$$

$$\left(1 - \frac{1}{2009} \right) \frac{x}{2} = 2008$$

$$x = 4018$$

【标注】【知识点】裂项法解一元一次方程

4. 解方程： $\frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{4} + \frac{x+3}{5} + \frac{x+4}{6} = 4$.

【答案】 $x = 2$.

【解析】原方程整理得：

$$\frac{x-2}{3} + 1 + \frac{x-2}{4} + 1 + \frac{x-2}{5} + 1 + \frac{x-2}{6} + 1 = 4$$

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{4} + \frac{x-2}{5} + \frac{x-2}{6} &= 0 \\ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) (x-2) &= 0 \\ \because \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} &\neq 0 \\ \therefore x-2 &= 0 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分离法解一元一次方程

5. 解方程： $|2x + 3| = 5$.

【答案】 $x = 1$ 或 $x = -4$.

【解析】 若将 $2x + 3$ 做为整体，根据绝对值的意义，
原方程可化为 $2x + 3 = 5$ 或者 $2x + 3 = -5$ ，
解得 $x = 1$ 或 $x = -4$ ；
若将 $2x$ 作为整体，则可理解为“ $2x$ ”到“ -3 ”的距离等于5的点是多少。

【标注】【知识点】含绝对值的一元一次方程

6. 解下列方程： $|4x - 3| - 2 = 3x + 4$

【答案】 $x = 9$ 或 $-\frac{3}{7}$

【解析】 $|4x - 3| - 2 = 3x + 4$

当 $x \geq \frac{3}{4}$ 时, $4x - 3 - 2 = 3x + 4$, 解得 $x = 9$;
 当 $x < \frac{3}{4}$ 时, $-4x + 3 - 2 = 3x + 4$, 解得 $x = -\frac{3}{7}$;
 综上所述, $x = 9$ 或 $-\frac{3}{7}$.

【标注】【知识点】含绝对值的一元一次方程

二、含参一元一次方程

7. 若方程 $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}x - 1\right) - 2 - x = 2$ 的解与关于 x 的方程 $\frac{x - m}{3} = 2x + m$ 的解相同, 求 m 的值.

【答案】10.

【解析】方程 $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}x - 1\right) - 2 - x = 2$,
 去括号得: $\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} - 2 - x = 2$,
 去分母得: $x - 4 - 6 - 3x = 6$,
 移项合并得: $-2x = 16$,
 解得: $x = -8$.
 把 $x = -8$ 代入方程得: $\frac{-8 - m}{3} = -16 + m$,
 去分母得: $-8 - m = -48 + 3m$,
 移项合并得: $4m = 40$,
 解得: $m = 10$.

【标注】【知识点】一元一次方程的同解问题

8. 若 $ax + b = 0$ 和 $mx + n = 0$ 是关于未知数 x 的同解方程, 则有 ().

A. $a^2 + m^2 > 0$

B. $mb \geq an$

C. $mb \leq an$

D. $mb = an$

【答案】 D

【解析】 $ax + b = 0$, 解得 $x = -\frac{b}{a}$
 $mx + n = 0$, 解得 $x = -\frac{n}{m}$
故 $-\frac{b}{a} = -\frac{n}{m}$
因此 $mb = an$.

【标注】【知识点】一元一次方程的同解问题

9. 小马虎在解关于 x 的方程 $1 - x = -2(x - 2a)$ 时, 误将等号右边的 “ $-2a$ ” 看作 “ $+2a$ ” , 其余解题过程均正确, 从而解得方程的解为 $x = -5$. 则原方程正确的解为 () .
- A. $x = 2$ B. $x = 3$ C. $x = 4$ D. $x = 5$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 根据题意, $x = -5$ 是关于 x 的方程 $1 - x = -2(x + 2a)$ 的解,
 $\therefore 1 - (-5) = -2(-5 + 2a)$,
解得 $a = 1$,
 $\therefore$ 原方程为 $1 - x = -2(x - 2)$,
解得 $x = 3$,
故选 B .

【标注】【知识点】一元一次方程的看错问题

10. 已知关于 x 的方程 $3x + 2a = x + 7$, 某同学在解这个方程时, 不小心把方程右边的 7 抄成了 -7 , 解得的结果为 $x = 2$, 求原方程的解 .

【答案】 $x = 9$.

【解析】 将 $x = 2$ 代入 $3x + 2a = x - 7$, 得 $6 + 2a = -5$,

$$\text{解得 } a = -\frac{11}{2},$$

所以正确的方程为 $3x - 11 = x + 7$,

移项、合并同类项, 得 $2x = 18$,

系数化为1, 得 $x = 9$,

原方程解为 $x = 9$.

【标注】【知识点】一元一次方程的看错问题

11. 当 k 为何值时, 关于 x 的方程 $\frac{3}{4} + 8x = 7k + 6x$ 的解比关于 x 的方程 $k(2 + x) = x(k + 2)$ 的解大6.

【答案】 $k = \frac{51}{20}$

【解析】 由第一个方程可以得到 $x = \frac{28k - 3}{8}$, 由第二个方程可以得到 $x = k$, 由题意, 得:
 $\frac{28k - 3}{8} - k = 6$, 解得,
 $k = \frac{51}{20}$.

【标注】【知识点】方程解的关系

12. 已知关于 x 的方程 $3x - 2m + 1 = 0$ 与 $2(1 - x) = m$ 的解互为相反数, 则 m 的值为 ____.

【答案】 -4

【解析】 $3x - 2m + 1 = 0$ 解得 $x = \frac{2m - 1}{3}$, $2(1 - x) = m$, 解得 $x = \frac{2 - m}{2}$.
 根据题意得 $\frac{2m - 1}{3} + \frac{2 - m}{2} = 0$, 解得 $m = -4$.

【标注】【知识点】方程解的关系

13. 若方程 $\frac{x - 1}{3} - 1 = 3x - \frac{2x + 1}{2}$ 与关于 x 的方程 $x + \frac{6x - a}{3} = \frac{ax}{2}$ 的解互为倒数, 求 a 的值.

【答案】 $a = 9$

【解析】由方程 $\frac{x-1}{3} - 1 = 3x - \frac{2x+1}{2}$ 可知, $x = -\frac{1}{2}$,
故方程 $x + \frac{6x-a}{3} = \frac{ax}{2}$ 的解为 $x = -2$, 代入可知 $a = 9$.

【标注】【知识点】方程解的关系

14. 若关于 x 的方程 $\frac{a}{2}x - \frac{1}{2} = 2 - \frac{x}{2}$ 的解为整数, 求整数 a 的所有可能取值.

【答案】 $a = -6, -2, 0, 4$.

【解析】由原方程解得: $x = \frac{5}{a+1}$, 为整数, 故 $a+1 = \pm 1, \pm 5$, 解得: $a = -6, -2, 0, 4$.

【标注】【知识点】一元一次方程的含参整数解

15. k 为整数, 关于 x 的方程 $kx - 5 = 3x + 2k$ 的解为整数, 那么满足条件的所有 k 的和为 _____.

【答案】12

【解析】由原方程得 $x = \frac{2k+5}{k-3} = 2 + \frac{11}{k-3}$,
 $\because k, x$ 为整数, $\therefore k-3 = \pm 1, \pm 11$, $\therefore k = -8, 2, 4, 14$,
 $-8 + 2 + 4 + 14 = 12$.
故答案为: 12.

【标注】【知识点】分离法解一元一次方程; 一元一次方程的含参整数解

16. 已知关于 x 的方程 $ax - 4x = -2$ 的解为正整数，则整数 a 的值为 _____ .

【答案】 3或2

【解析】 $ax - 4x = -2$
 $(a - 4)x = -2$
 $x = \frac{2}{4 - a}$.
 $\because x$ 为整数， a 为整数，
 $\therefore 4 - a = 1$ 或 $4 - a = 2$ ，
 $\therefore a = 3$ 或 $a = 2$.

【标注】【知识点】一元一次方程的含参整数解

17. 已知关于 x 的方程 $(2a + b)x - 1 = 0$ 无解，那么 ab 的值是 () .

- A. 负数 B. 正数 C. 非负数 D. 非正数

【答案】 D

【解析】 关于 x 的方程 $(2a + b)x - 1 = 0$ 无解，则 $2a + b = 0$ ，
 $\therefore$ 有 $a = b = 0$ 或者 a 、 b 异号，
 $\therefore ab$ 的值为非正数，
故选D .

【标注】【知识点】解的情况

18. 解关于 x 的方程： $ax - b = 2x - 3$.

【答案】 答案见解析 .

【解析】 原方程整理得 $(a - 2)x = b - 3$.

当 $a - 2 \neq 0$ ，即 $a \neq 2$ 时，则原方程的解为 $x = \frac{b-3}{a-2}$ ；

当 $a - 2 = 0$ ， $b - 3 \neq 0$ ，即 $a = 2$ ， $b \neq 3$ 时，原方程化为 $0x \neq 0$ ，则原方程无解；

当 $a - 2 = 0$ ， $b - 3 = 0$ ，即 $a = 2$ ， $b = 3$ 时，原方程化为 $0x = 0$ ，则原方程有无数解。

【标注】【知识点】求含参一元一次方程一系数含参

19. 解关于 x 的方程 $(2a + b)x - ax + b = 0$ 。

【答案】当 $a \neq -b$ 时，方程有唯一解， $x = \frac{-b}{a+b}$ 。

当 $a = b = 0$ 时，方程有无数解， x 取值为全体实数。

当 $a = -b$ 且 $b \neq 0$ 时，方程无解。

【解析】 $(a + b)x + b = 0$ ，

$(a + b)x = -b$ 。

当 $a \neq -b$ 时，方程有唯一解， $x = \frac{-b}{a+b}$ 。

当 $a = b = 0$ 时，方程有无数解， x 取值为全体实数。

当 $a = -b$ 且 $b \neq 0$ 时，方程无解。

【标注】【知识点】解的情况

20. 已知关于 x 的方程 $a(a - 2)x = 4(a - 2)$ ，则当 a 为何值时此方程有唯一解？无解？无数解？

【答案】唯一解： $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$ ；无数解： $a = 2$ ；无解： $a = 0$

【解析】唯一解： $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$ ；无数解： $a = 2$ ；无解： $a = 0$

【标注】【知识点】解的情况